普遍Bernoulli数と円分型代数函数版Bernoulli-Hurwitz数 (代数的整数論とその周辺)

大西, 良博

数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 50-60

普遍 Bernoulli 数と円分型代数函数版 Bernoulli-Hurwitz 数

大西 良博 (Yoshihiro Ônishi)
岩手大学 人文社会科学部 (Iwate University)

1 はじめに

Bernoulli 数について von Staudt-Clausen の定理, von Staudt の第 2 定理, Kummer の合同式はその重要な性質として知られてゐる. 本来の Bernoulli 数が三角函数 (たとへば $\cot(u)$) の $u=0$ における Laurent 係数であり, Hurwitz 数が楕円函数 $\wp(u)$ の Laurent 係数であるやうに, ここではより種数の高い代数曲線に対応する代数函数のうまい変数による Laurent 係数を**一般 Bernoulli-Hurwitz 数**と呼ぶ. 一方, **普遍 Bernoulli 数**といふのは, 非常に一般的な設定で定義されるものであつて, それを特殊化することで, あらゆる一般 Bernoulli-Hurwitz 数が得られる.

これらの数について, von Staudt-Clausen 型の定理, von Staudt の第 2 定理, および Kummer 型の合同式が, 非常に自然な形で拡張できることを述べるのが, 本稿の目的である.

今回の一般 Bernoulli 数についての von Staudt-Clausen 型の定理と von Staudt の第 2 定理の拡張の証明は, 上記の形式群に付随する形式的指数函数のいろいろな冪を (Lagrange の逆関数定理を利用して) 関係づける, といふ方法でなされてた. また, Kummer 型の合同式は, 安田正大氏により, 形式群に対する本田の定理に帰着させて証明された. これらはすべて Bernoulli 数に対しての種々の性質を, 指数法則を駆使して証明する古典的な方法の自然な拡張と考へられる.

Bernoulli 数と Hurwitz 数については p 進 L 函数や保型形式との結び付きが知られてゐるが, 種数が 2 以上の場合についてはそれは今後の大きな課題である. とくに今回発見された一般 Bernoulli-Huruwitz 数についての Kummer 型合同式 (定理 5.3.1 や系 5.3.2) を Bernoulli 数について成り立つ Euler 因子付きの合同式, 即ち, 奇素数 p, 自然数 a, および $p-1$ で割れない自然数 n について成り立つ合同式

$$(1-p^{n})\frac{B_{n}}{n}\equiv(1-p^{n+p^{a-1}(p-1)})\frac{B_{n+p^{a-1}(p-1)}}{n+p^{a-1}(p-1)}\mod p^{a}$$

の方向に拡張するとどうなるのかを調べることは興味深いことであらう.

この報告では主張そのものについての記述を優先した. 詳しい証明については, [**Ô1**], [**Ô2**], [**Ya1**], [**Ya2**] に詳しく書かれてゐるので, そちらを参照されたい.

2 普遍 Bernoulli 数とその性質

2.1. 普遍 Bernoulli 数の定義. 無限個の不定元 c_1, c_2, $\cdots$ について，冪級数

$$u = u(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \tag{2.1.1}$$

と，これの逆函数級数

$$t = t(u) = u - c_1 \frac{u^2}{2!} + (3{c_1}^2 - 2c_2)\frac{u^3}{3!} + \cdots, \tag{2.1.2}$$

つまり $u(t(u)) = u$ なるものを考へる．このとき

$$\frac{u}{t(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{B}_n \frac{u^n}{n!} \tag{2.1.2}$$

で $\hat{B}_n$ を定め，これを（第 1 階）**普遍 Bernoulli 数** と呼ぶ．もちろん $\hat{B}_n \in \mathbf{Q}[c_1, c_2, \cdots]$ である．

いま $c_n = (-1)^n$ とすれば $\psi(t) = \log(1+t)$, $\varphi(u) = e^t - 1$ なので $\hat{B}_n$ は本来の Bernoulli 数に他ならない．

2.2. 普遍 Bernoulli 数の Schur 函数型表示. 少し記号を導入する：非負整数の有限列 $U = (U_1, U_2, \cdots)$ に対し，$w(U) = \sum_j jU_j$ と記し，これを U の**重さ**と呼ぶ．また $d(U) = \sum_j U_j$ と記し，これを U の**次数**と呼ぶ．U は $w(U)$ の所謂**分割**である．また

$$U! = U_1!U_2!\cdots \qquad \binom{d}{U} = \frac{d!}{U!} \tag{2.2.1}$$

などと記す．さらに $\Lambda^U = 2^{U_1}3^{U_2}4^{U_3}\cdots$, $c^U = {c_1}^{U_1}{c_2}^{U_2}{c_3}^{U_3}\cdots$ などの記法も使ふ．さらに

$$\gamma_U = \Lambda^U U! \tag{2.2.2}$$

と略記する．

いま，$h(t) = (\psi(t)/t) - 1$ とすると

$$(\psi(t)/t)^s = (1 + h(t))^s = \sum_{d=0}^{\infty} \binom{s}{d} h^d(t) \tag{2.2.3}$$

であり

$$h^d(t) = \sum_{d(U)=d} \binom{d}{U} \frac{c^U}{\Lambda^U} t^{w(U)} \tag{2.2.4}$$

であるので，

$$\tau_U=(-1)^{d(U)-1}\frac{(w(U)+d(U)-2)!}{\gamma_U}. \tag{2.2.5}$$

と書くことにすれば，命題 1.2.1 を $\ell=1$ として使ふことで次の表示を得る．

命題 2.2.6. 次が成り立つ：

$$\frac{\hat{B}_n}{n}=\sum_{w(U)=n}\tau_U c^U.$$

この表示は以下で述べる $\hat{B}_n$ の種々の性質を証明するのに基本的である．

2.3. Clarke の定理. 読者の便宜を考へ，参考までに Clarke によつて証明された普遍 Bernoulli 数に対する，von Staudt 型の強力な定理を紹介する．以下，自然数 a に対して $a|_p$ は a の 非 p 冪部分を表すとする．つまり $a|_p=a/p^{\mathrm{ord}_p a}$.

命題 2.3.1. 次が成り立つ：

$$\hat{B}_1=\frac{1}{2}c_1,$$

$$\frac{\hat{B}_2}{2}=-\frac{1}{4}{c_1}^2+\frac{1}{3}c_2,$$

$$\frac{\hat{B}_n}{n}\equiv\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{n=a(p-1)\\ p:\text{素数}}}\frac{{a|_p}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}}\,{c_{p-1}}^a & (n\equiv 0 \mod 4 \text{ のとき})\\[2ex] \displaystyle\frac{{c_1}^{n-6}{c_3}^2}{2}-\frac{n{c_1}^n}{8}+\sum_{\substack{n=a(p-1)\\ p:\text{奇素数}}}\frac{{a|_p}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}}\,{c_{p-1}}^a & \\ \qquad\qquad (n\neq 2 \text{ かつ } n\equiv 2 \mod 4 \text{ のとき}) & \\[2ex] \displaystyle\frac{{c_1}^n+{c_1}^{n-3}c_3}{2} & (n\neq 1 \text{ かつ } n\equiv 1,3 \mod 4 \text{ のとき})\end{cases}$$

$$\mod \mathbf{Z}[c_1,c_2,\cdots].$$

証明は命題 2.2.6 の表示を使つて，初等的になされる．興味のある方には [Cl]，Theorem 5 を参照されたい．

2.4. 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer 型合同式. ここでは普遍 Bernoulli 数について，Kummer 型合同式が mod $p^{\lfloor a/2 \rfloor}$ では成立することを示す．すなはち，

> **定理 2.4.1.** 素数 p を固定する．a と n を正整数とし，$n > a$ かつ $n \not\equiv 0 \bmod (p-1)$ とする．このとき，
> $$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-1)^r {c_{p-1}}^{a-r} \frac{\hat{B}_{n+r(p-1)}}{n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^{\lfloor a/2 \rfloor}$$
> が成り立つ．

これの証明は，命題 2.2.6 の表示を定理 2.4.1 の左辺に代入したのちに，同類項をまとめ，それらの係数を精密に評価することで得られる．詳くは [**Ô1**] および [**Ya1**] を参照されたい．

注意 2.4.2. (1) $a = 1$ で $n > a$ かつ $n \not\equiv 0,\ 1 \bmod p$ のときは上記合同式が mod p で成立する．これは [**A1**], Theorem 3.2 で証明された．
(2) 任意に与へられた奇素数 $p \geqq 7$ に対して，$U_1 = p$，$U_{2p-1} = (p-3)/2$ で他の成分は $U_j = 0$ なる U を考へる．このとき $w(U) = p + (p-5)(2p-1)/2 \equiv -1 \bmod (p-1)$ である．これについて

$$\mathrm{ord}_p(\tau_U) = (p-5)/2 (= \lfloor (p-4)/2 \rfloor)$$

が成り立つことが示せる．いま $a = p-4$ および $n = w(U)$ と取れば $n > a$ であり，この状況は上記 modulus が最良であることを示してゐる．
(3) 上記の例で $p = 5$ としても $\mathrm{ord}_5(\tau_U) = 0$ となるのだが，この場合は $n = w(U) = 5 \equiv 1 \bmod (5-1)$ なので [**A1**] の Theorem 3.2 では除外された場合となつてしまふ．この例に注意を払へば，[**Ô1**] の証明をいくらか修正することで上記合同式が $a = 1$ のときには mod p で成り立つことを示すことができる．

さらに，2.4.1 から，Adelberg の得た以下の型の合同式（[**A2**], Theorem の (i)）が直接的に導かれる．

> **系 2.4.3.** (Adelberg の合同式) $n \not\equiv 0,\ 1 \bmod p-1$，$n > a$ のとき
> $${c_{p-1}}^{p^{a-1}} \cdot \frac{\hat{B}_n}{n} \equiv \frac{\hat{B}_{n+p^{a-1}(p-1)}}{n + p^{a-1}(p-1)} \mod p^a.$$

証明については [**Ô1**] を参照いただきたい．

$\boxed{3}$ 超楕円函数

3.1. 基本的事項. 種数 g の超楕円曲線 $C: y^2 = f(x)$ を考へる．ただし，

$$f(x) = \lambda_0 x^{2g+1} + \lambda_1 x^{2g} + \cdots + \lambda_{2g+1}$$

は $f(x) = 0$ が重根をもたないやうな x の $\mathbf{C}$ 上の多項式であり，先頭の係数は $\lambda_0 = 1$ とする．このとき C は無限遠に 1 点 ∞ を持つ非特異代数曲線である．良く知られてゐるやうに

$$\frac{x^{j-1}dx}{2y} \quad (j = 1, \ldots, g) \tag{3.1.1}$$

が C の第 1 種微分形式の基底をなす．通常の方法で，Riemann 面としての C の基本群の適当な生成系についての，これらの微分形式に関する周期を $[\omega' \ \omega'']$ とし，$\mathbf{C}^g$ の格子

$$\Lambda := \omega'\,{}^t[\mathbf{Z} \quad \mathbf{Z} \quad \cdots \quad \mathbf{Z}] + \omega''\,{}^t[\mathbf{Z} \quad \mathbf{Z} \quad \cdots \quad \mathbf{Z}] \ (\subset \mathbf{C}^g)$$

を考へておく．

曲線 C の Jacobi 多様体を J と記し，C の g 個の**対称積**を $\mathrm{Sym}^g(C)$ と書けば，双有理写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^g(C) &\to \mathrm{Pic}^\circ(C) = J \\ (P_1, \ldots, P_g) &\mapsto \text{the class of } P_1 + \cdots + P_g - g \cdot \infty \end{aligned}$$

を得る．解析的な多様体として J は $\mathbf{C}^g/\Lambda$ と同一視される．我々は κ でもつて，自然な写像 $\mathbf{C}^g \to \mathbf{C}^g/\Lambda = J$ を表す．写像

$$\iota : Q \mapsto Q - \infty$$

により，C は J に埋めこまれる．この埋め込み ι の像の κ による引き戻し $\kappa^{-1}\iota(C)$ は曲線 C の **普遍 Abel 被覆** になつてゐる．また，上記の双有理写像は，解析的には，各 $(P_1, \ldots, P_g) \in \mathrm{Sym}^g(C)$ を点 $u \mod \Lambda \in \mathbf{C}^g/\Lambda$，ただし

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_g) = \left(\int_\infty^{P_1} + \cdots + \int_\infty^{P_g} \right) (\omega_1, \ \ldots, \ \omega_g), \tag{3.1.2}$$

に写す写像に他ならない．

3.2. 超楕円函数とその変数. このノートでは，各点 $\boldsymbol{u} \in \kappa^{-1}\iota(C)$ に対し，記号

$$x(\boldsymbol{u}), \qquad y(\boldsymbol{u})$$

でもつて，$\kappa(\boldsymbol{u}) = \iota(x(\boldsymbol{u}), \ y(\boldsymbol{u}))$ なる C の (x, y) 座標を表すことにする．我々は，これやこれらの有理式を $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数と見て，**超楕円函数**と呼ぶのである．

まづ，基本的なこととして次の補題を確認しておく．

補題 3.2.1. 超楕円函数 $x(\boldsymbol{u})$ と $y(\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{u}=(0,\cdots,0)$ における Laurent 展開に関して

$$x(\boldsymbol{u})=\frac{1}{u_g^2}+(d^\circ(u_g)\geqq 0),\quad y(\boldsymbol{u})=-\frac{1}{u_g^{2g+1}}+(d^\circ(u_g)\geqq -2g+1).$$

証明. 無限遠点 ∞ における局所助変数として $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ をとる．ただし $x>0$ なら $t>0$ となるものとする．いま $u\in\kappa^{-1}\iota(C)$ は十分 $(0,0,\ldots,0)$ に近いとし，3 つの座標 t，$\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_g)$，$(x,y)$ が C の同一点に対応するものとすれば

$$\begin{aligned}u_g&=\int_\infty^{(x,y)}\frac{x^{g-1}dx}{2y}=\int_\infty^{(x,y)}\frac{x^{-3/2}dx}{2\sqrt{1+\lambda_1\frac{1}{x}+\cdots+\lambda_{2g+1}\frac{1}{x^{2g+1}}}}\\&=\int_0^t\frac{t^3\cdot\left(-\frac{2}{t^3}\right)dt}{2+(d^\circ\geqq 1)}=-t+(d^\circ(t)\geqq 2).\end{aligned}$$

ゆゑに $x(\boldsymbol{u})=\frac{1}{u_g^2}+(d^\circ(u_g)\geqq -1)$ がわかる．定義より $x(-\boldsymbol{u})=x(\boldsymbol{u})$，$y(-\boldsymbol{u})=-y(\boldsymbol{u})$ であるから，主張は証明された． □

つぎの補題も同様な計算で示されるので証明は省略する．

補題 3.2.2. いま $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_g)$ が $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上を動くとせよ．このとき

$$\begin{aligned}u_1&=\tfrac{1}{2g-1}{u_g}^{2g-1}+(d^\circ(u_g)\geqq 2g),\\u_2&=\tfrac{1}{2g-3}{u_g}^{2g-3}+(d^\circ(u_g)\geqq 2g-2),\\&\cdots\cdots\cdots\\u_{g-1}&=\tfrac{1}{3}{u_g}^3+(d^\circ(u_g)\geqq 4)\end{aligned}$$

である．

以上からわかるやうに，

超楕円函数 $x(\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{u}=(0,\cdots,0)$ における局所助変数としては u_g をとるのが自然である．

4 微分方程式

4.1. 一般論. 超楕円曲線 $y(\boldsymbol{u})^2=f\bigl(x(\boldsymbol{u})\bigr)$ （f は $2g+1$ 次の分離的多項式）について u_g の定義から

$$\frac{du_g}{dx}(\boldsymbol{u})=\frac{x^{g-1}}{2y}(\boldsymbol{u})\tag{4.1.1}$$

であるが，これを平方してこの曲線の定義式を代入すれば $\left(\frac{du_g}{dx}\right)^2 = \frac{x^{2g-2}}{4f}$ を得る．つまり

$$x(\boldsymbol{u})^{2g-2}x'(\boldsymbol{u})^2 = 4f\big(x(\boldsymbol{u})\big) \quad \text{(ただし $'$ は $\dfrac{d}{du_g}$ を表す)}. \tag{4.1.2}$$

この (4.1.2) こそが $\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$ の類似である[1]．そこで $x(\boldsymbol{u})$ の u_g に関する Laurent 展開を

$$x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{{u_g}^2} + \frac{c_{-1}}{u_g} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n} \frac{{u_g}^{n-2}}{(n-2)!} \tag{4.1.3}$$

と書いて C_n を定めれば，C_n が Bernoulli 数や Hurwitz 数の類似となる．Bernoulli 数や Hurwitz 数の場合を勘案すると C_n は 2 の冪で割つたものに置き換へるべきなのかも知れない．これは将来の課題であるが，今回はこのやうに置いておく．もちろん C_n の漸化式が (4.1.2) から得られる．また $y(\boldsymbol{u})$ についてもその $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ における u_g に関する Laurent 展開を

$$y(\boldsymbol{u}) = \frac{-1}{{u_g}^{2g+1}} + \frac{d_{-2g}}{{u_g}^{2g}} + \cdots + \frac{d_{-1}}{u_g} + \sum_{n=2g+1}^{\infty} \frac{D_n}{n} \frac{{u_g}^{n-2g-1}}{(n-2g-1)!} \tag{4.1.4}$$

と書いて D_n を定めておく．もちろん $y(\boldsymbol{u})$ の微分方程式も $du_g = x^{g-1}dx/2y$ から得られて，D_n の漸化式もそこから得られる．

4.2. 円分型 $y(\boldsymbol{u})^2 = x(\boldsymbol{u})^5 - 1$ の場合．話を鮮明にするために，以下は種数 $g = 2$ の曲線 $y^2 = x^5 - 1$ に限つて説明する．この場合 (4.1.2) は

$$x(\boldsymbol{u})^2 x'(\boldsymbol{u})^2 = 4x^5(\boldsymbol{u}) - 4 \quad \text{($'$ は $\dfrac{d}{du_2}$ を表す)}. \tag{4.2.1}$$

となる．この (4.2.1) は $\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - 1$ の類似である．ここで，この曲線 C : $y^2 = x^5 - 1$ と Jacobi 多様体 J の自己同型について述べておく．まづ $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$ とおくと，C には

$$\pm[\zeta^j] : C \to C, \quad (x, y) \mapsto (\zeta^j x, \pm y) \quad (j = 0, \cdots, 4)$$

なる自己同型がある．これは $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ の自己同型

$$\pm[\zeta^j] : P_1 + P_2 - 2\infty \mapsto (\pm[\zeta^j])P_1 + (\pm[\zeta^j])P_2 - 2\infty$$

---

[1] Carlitz は論文 **[Ca2]** で，$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$ の代りに $\left(\frac{dx}{du}(u)\right)^2 =$ “$x(u)$ の 6 次式” ($u \in \mathbf{C}$) なる微分方程式（の解 $x(u)$）を考へてもうまくいかないと述べてゐる．

ただし P_1, $P_2 \in C$, を通じて J の自己同型を与へる．このとき（3.1.1）と（3.1.2）により

$$-[\zeta](u_1, u_2) = (-\zeta u_1, -\zeta^2 u_2)$$

であることがわかる．つまり

$$x(-[\zeta]\boldsymbol{u}) = \zeta x(\boldsymbol{u}), \quad y(-[\zeta]\boldsymbol{u}) = -y(\boldsymbol{u}) \tag{4.2.2}$$

である．これより，n が 10 で割りきれなければ，

$$C_n = D_n = 0$$

である．

$\boxed{5}$ 主結果 $(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^5 - 1$ の場合）．

引き続き，種数 $g = 2$ の曲線 $y^2 = x^5 - 1$ に限定して結果を述べる．

5.1. von Staudt-Clausen 型の定理，von Staudt の第 2 定理の拡張この場合の C_{10n} と D_{10n} についての von Staudt-Clausen 型定理はつぎのとほり：

定理 5.1.1. 各 C_{10n} と D_{10n} は，ある整数 G_{10n} やある整数 H_{10n} でもつて

$$C_{10n} = \sum_{\substack{p\equiv 1 \mod 5 \\ p-1|10n}} \frac{{A_p}^{10n/(p-1)}}{p} + G_{10n},$$

$$D_{10n} = \sum_{\substack{p\equiv 1 \mod 5 \\ p-1|10n}} \frac{(4!^{-1} \bmod p)\, {A_p}^{10n/(p-1)}}{p} + H_{10n}$$

と書ける．ただし

$$A_p = (-1)^{(p-1)/10} \cdot \binom{(p-1)/2}{(p-1)/10}.$$

いま，$C \bmod p$ の第 1 種微分形式の空間の基底を上記のやうに

$$\left(\frac{dx}{2y}, \frac{xdx}{2y}\right)$$

ととれば，この基底に関する Hasse-Witt 行列は，対角行列となり，その (2, 2) 成分が上記 A_p に他ならない．([**Y**], p.381)．Katz が Hurwitz 数の場合に [**Ka**], p.2 において，“分子” が Hasse invariant（つまり Hasse-Witt 行列の唯一の成分！）に他ならないことを指摘してゐるが，我々の場合，それのきはめて自然な一般化になつてゐる．

さらに，Bernoulli 数に関しての von Staudt の第 2 定理は次のやうに一般化される．

定理 5.1.2. 任意の素数 $p \equiv 1 \bmod 5$ と任意の自然数 n について，$p-1 \nmid 10n$ ならば

$$\frac{C_{10n}}{10n},\ \frac{D_{10n}}{10n} \in \mathbf{Z}_{(p)}.$$

さらに，普遍 Bernoulli 数に対して，Clarke が命題 2.3.1 を定式化したやうに上記二つの定理をまとめることもできる．

5.3. Kummer 型の合同式. 我々の C_{10n} と D_{10n} についての，Kummer の original 型合同式はつぎのとほり：

定理 5.3.1. 素数 $p \equiv 1 \bmod 5$ と自然数 a と n，ただし $10n-2 \geqq a$，について，$(p-1) \nmid 10n$ ならば，

$$\sum_{r=0}^{a}(-1)^r\binom{a}{r}{A_p}^{a-r}\cdot\frac{C_{10n+r(p-1)}}{10n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^a,$$

$$\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}-{A_p}^{a-r}\cdot\frac{D_{10n+r(p-1)}}{10n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^a$$

が成り立つ．ただし

$$A_p = (-1)^{(p-1)/10}\cdot\binom{(p-1)/2}{(p-1)/10}.$$

この合同式は Kummer の original [**Ku**] の形であり，Hurwitz 数の場合（[**L**]，p.190, (20)）と全然変はらない．定理 3.1.1 よりこの予想は mod $p^{\lfloor a/2\rfloor}$ （$a=1$ のときは mod p）で成立する（第 15.4 節参照）ことはわかる．しかし，mod p^a で成立することは安田正大氏により最終的に証明された（[**Ô2**] と [**Ya2**]）．

もちろん，先の系 2.1.3 の形の合同式も成り立つ．

系 5.3.2. $p-1 \nmid 10n$，$10n+2 \geqq a$ のとき

$${A_p}^{p^{a-1}}\cdot\frac{C_{10n}}{10n} \equiv \frac{C_{10n+p^{a-1}(p-1)}}{10n+p^{a-1}(p-1)} \mod p^a,$$

$${A_p}^{p^{a-1}}\cdot\frac{D_{10n}}{10n} \equiv \frac{D_{10n+p^{a-1}(p-1)}}{10n+p^{a-1}(p-1)} \mod p^a.$$

6 収束が正当化できてゐないある Eisenstein 型の級数との関連（付録）．

ここまで述べてきた C_n （や D_n）がL 函数のやうなものと結びつくであらうか．以下のやうな考察から，そのやうなことを期待することが全くばかばかしいことではないことがおわかりいただけると思ふ．

始めに，Hurwitz の公式

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\sqrt{-1}\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{\lambda^{4n}} = \frac{\varpi^{4n}}{(4n)!}2^{4n}E_{4n} \tag{6.2.1}$$

の証明を復習してみる（[**H1**] または [**AIK**]，pp.193-198 を参照）．ただし，

$$\varpi = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-x}}\,(>0)\,.$$

即ち，２種類の展開

$$\begin{aligned}\wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^nE_n}{n}\frac{u^{n-2}}{(n-2)!},\\ \wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{\lambda\in\mathbf{Z}\varpi+\mathbf{Z}\varpi\sqrt{-1}\\ \lambda\neq 0}}\left(\frac{1}{(u-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

を等置して両辺から $1/u^2$ を除き，さらに両辺を $4n-2$ 回微分した後，$u=0$ を代入すれば得られる．これは $1/\sin^2(u)$ の同様な２種類の展開から Riemann の zeta 函数の特殊値 $\zeta(2m)$ を Bernoulli 数と円周率で書く公式を得るのと全く同じ手順である．

我々の $y^2=x^5-1$ の場合でも，$x(\boldsymbol{u})$ は各格子点 $\ell=(\ell_1,\ell_2)\in\Lambda$ （$\subset\mathbf{C}^2$）において Laurent 展開

$$x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{(u_2-\ell_2)^2}+\cdots \tag{6.2.3}$$

をもつので，いまのところ数学的には正当化できないものの

$$x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{{u_2}^2} + \sum_{\ell\in\Lambda,\ \ell\neq 0}^{*}\left(\frac{1}{(u_2-\ell_2)^2}-\frac{1}{{\ell_2}^2}\right) \tag{6.2.4}$$

（ここで，* は，いまのところ収束を正当化できない和であることを示す.）なる展開が正当化されて，$\wp(u)$ のときと同様に次の式が示されるのではないだらうか：

$$\boxed{\sum_{\lambda\in\Omega\cdot\mathbf{Z}[\zeta],\ \lambda\neq 0}^{*}\frac{1}{\lambda^{10n}} = \frac{\Omega^{10n}}{10n)!}C_{10n}} \tag{6.2.5}$$

ただし，$\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$,

$$\Omega = \int_1^\infty \frac{xdx}{y} \quad (>0)$$

である．もしこれが正当化されれば，Hecke の量指標つき L 函数とは異なる新たな L 函数と呼ぶべきものが見つかったことになる．

文 献

[A1] A. Adelberg, *Universal higher order Bernoulli numbers and Kummer and related congruences*, J. Number Theory, **84** (2000), 119-135.

[A2] A. Adelberg, *Universal Kummer congruences mod prime powers*, Preprint.

[AIK] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, "ベルヌーイ数とゼータ関数", 牧野書店, 2001.

[Ca1] L. Carlitz, *The coefficients of the reciprocal of a series*, Duke Math. J., **8** (1941), 689-700.

[Ca2] L. Carlitz, *Congruences for the coefficients of hyperelliptic and related functions*, Duke Math. J., **19** (1952), 329-337.

[Cl] F. Clarke, *The universal von Staudt theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **315** (1989), 591-603.

[H1] A. Hurwitz, *Über die Entwicklungskoeffizienten der leminiskatishen Funktionen*, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, (1897), 273-276 (Werke, Bd.II, pp.338-341).

[H2] A. Hurwitz, *Über die Entwicklungskoeffizienten der leminiskatishen Funktionen*, Math. Ann., **51** (1899), 196-226 (Werke, Bd.II, pp.342-373).

[Ka] N.M. Katz, *The congruence of Clausen-von Staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers*, Math. Ann., **216** (1975), 1-4.

[Ku] E.E. Kummer, *Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. für die reine und angew. Math. **41** (1851), 368-372.

[L] H. Lang, *Kummersche Kongruenzen für die normierten Entwicklungskoeffizienten der Weierstrasschen $\wp$-Funktionen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **33** (1969), 183-196.

[Ô1] 大西良博, 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer の原型合同式, 数論セミナー静岡 2004 （筆者の Web page から download 可） (2004), 111-126.

[Ô2] 大西良博, Bernoulli-Hurwitz 数の理論の円分型代数函数版, preprint, （筆者の Web page から download 可） (2003), 98 pages.

[Ya1] 安田正大, [**Ô1**] の補題 3.2.8 の証明, 手書きのノート (2004).

[Ya2] 安田正大, [**Ô2**] の予想 7.1.1 の証明, 手書きのノート (2004).

[Yu] N. Yui, *On the Jacobian varieties of hyperelliptic curves over fields of characteristic* $p > 2$, Journ. of Algebra **52** (1978), 378-410.

Email : onishi@iwate-u.ac.jp